Lemme : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon>0$. Il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$ telle que sa norme subordonnée $|||\cdot|||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $|||A||| < \rho(A)+\varepsilon$

Preuve :

A est trigonalisable donc il existe T triangulaire et une matrice $P\in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A=PTP^{-1}$. Pour $\delta\in\mathbb{R}^{+*}$ on définit $D_\delta=\mathrm{diag}(1,\delta,\dots,\delta^{n-1}) \in GL_n(\mathbb{C})$

On note $T=(T_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ on a donc

$$T_\delta = D_\delta^{-1} T D_\delta = \begin{bmatrix} T_{1,1} & \delta T_{1,2} & \cdots & \delta^{n-1} T_{1,n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & \ddots & \delta T_{n-1,n} \\ & & & T_{n,n} \end{bmatrix} = D_\delta^{-1} P^{-1} A P D_\delta$$

Soit $x\in\mathbb{C}^n$ on définit la norme $\|x\| = \|(PD_\delta)^{-1}x\|_\infty$ et on note $|||\cdot|||$ la norme subordonnée associée.

On a : $\forall B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $|||B||| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Bx\| = \sup\limits_{\|(PD_\delta)^{-1}x\|_\infty\le 1} \|(PD_\delta)^{-1}Bx\|_\infty$

$y=(PD_\delta)^{-1}x$

$$= \sup_{\|y\|_\infty\le 1} \|(PD_\delta)^{-1} B P D_\delta y\|_\infty = |||(PD_\delta)^{-1} B P D_\delta|||_\infty$$

Or $\forall M=(M_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $|||M|||_\infty = \sup\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |M_{i,j}|$.

On choisit donc $\delta>0$ tel que $\sum\limits_{j=i+1}^{n} \delta^{j-i} |T_{i,j}| < \varepsilon$, $\forall i\in[\![1,n-1]\!]$.

Et on a $\rho(A) = \sup\limits_{1\le i\le n} |T_{i,i}|$ d'où $|||A||| = |||(PD_\delta)^{-1} A (PD_\delta)|||_\infty$

$$= |||T_\delta|||_\infty$$

$$= \sup_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |T_{\delta\,i,j}| \le \rho(A)+\varepsilon$$

$\square$

Def : Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$ l'unique sol° de $Ax = b$. Si on a $(M, N) \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que $A = M - N$. On dit que la méthode itérative associée à (M, N) converge si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite définie par x_0 et $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$ converge

Thm : La méthode itérative associée à (M, N) converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$

Preuve : Soit x tel que $Ax = b \Rightarrow Mx = b + Nx$

~~On définit $e_k =$~~

On définit $e_k = x_k - x$ on a donc $x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} x \Leftrightarrow e_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

On a $Ax = b \Rightarrow Mx = b + Nx \Rightarrow x - M^{-1}b = M^{-1}Nx$ d'où

$e_{k+1} = x_{k+1} - x = M^{-1}(Nx_k + b) - x = M^{-1}N(x_k - x) = M^{-1}Ne_k$

D'où $e_k = (M^{-1}N)^k e_0$ ce qui ramène la convergence de la suite $(e_k)_k$ à la suite $((M^{-1}N)^k)_k$

- Si $\rho(M^{-1}N) < 1$. On pose $\varepsilon = 1 - \rho(M^{-1}N) > 0$ d'après le lemme précédent on a $|||M^{-1}N||| < \rho(M^{-1}N) + \varepsilon < 1$ on a donc

$\|e_k\| = \|(M^{-1}N)^k e_0\| \leq |||(M^{-1}N)^k||| \, \|e_0\| \leq |||M^{-1}N|||^k \|e_0\|$

D'où $e_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

D'où la convergence de la méthode

- Si $\rho(M^{-1}N) \geq 1$, soit λ une valeur propre complexe de $M^{-1}N$ telle que $|\lambda| \geq 1$

Soit v un vecteur propre associé à λ, d'où $(M^{-1}N)^k v = \lambda^k v$

On pose $v = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^n$ d'où $(M^{-1}N)^k v = (M^{-1}N)^k a + i(M^{-1}N)^k b = \lambda^k a + i\lambda^k b$

Donc une des suites $((M^{-1}N)^k a)_k$ ou $((M^{-1}N)^k b)_k$ ne converge pas vers 0

La méthode itérative ne converge pas pour $x_0 = a + x$ ou $x_0 = x + b$

On a $x_k \not\to x$.

$\square$

COMPLEMENTS

Déf : On définit les méthodes suivantes :

- Jacobi : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = \text{diag}(A_{1,1}, \dots, A_{n,n})$ et $N = M - A$ $\to \rho(\mathcal{L}_J)$ son rayon spectral, $J = M^{-1}(M - A)$
- Gauss-Seidel : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\begin{cases} L \text{ sa partie triangulaire inf} \\ U \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{sup} \\ D \text{ sa diagonale} \end{cases}$ dans $A = M - N$ avec $M = L + D$, $N = -U$

  $\to \rho(\mathcal{L}_1)$ son rayon spectral, $\mathcal{L}_1 = (L+D)^{-1} N$

Thm : Si A est tridiagonale, alors $\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(\mathcal{L}_J)^2$

Dém : on pose la matrice $A(\mu) = \begin{bmatrix} b_1 & \mu^{-1} c_1 & & 0 \\ \mu a_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \mu^{-1} c_{n-1} \\ 0 & & \mu a_n & b_n \end{bmatrix}$; $\mu \neq 0$

D'où $A = A(1)$ et $A(\mu) = Q(\mu) A Q(\mu)^{-1}$ où $Q(\mu) = \text{diag}(\mu, \dots, \mu^n)$

D'où $\det A(\mu) = \det A$

on a le poly caract de J qui est $\chi_J(\lambda) = \det($